第 29 講　式と証明(2)

例題 29 ー 1

次の等式を証明せよ.

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 29 ー 1

次の等式を証明せよ.

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 29 － 2

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 29 ー 2

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題29－3

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2-x+1\geqq x$　　(2)　$x^2-6x+10>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5\geqq 0$　　(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 29 － 3

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 29 － 4

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき　$xy>4x+3y-12$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq |a|+|b|$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 29 ー 4

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x<-3$，$y<2$ のとき　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\sqrt{2(x^2+y^2)} \geqq |x|+|y| \geqq \sqrt{x^2+y^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 29 講　式と証明(2)

(1)　$3x+y=3z$　……①，$x-3y=-z$　……②　のとき　$x^2+y^2=z^2$ であることを証明する．

①と②より x，y を z を用いて表すと　$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z$　である．

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z\right)^2+\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z\right)^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$　である．

(2)　不等式 $x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$ が成り立つことを証明する．

(左辺)－(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-\boxed{オ}y)^2+(y-\boxed{カ})^2 \geqq 0$

より　$x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$　である．

また，等号が成立するのは　$x=\boxed{キ}$，$y=\boxed{ク}$　のときである．

(3)　$|a|<1$，$|b|<1$ のとき，$ab+1>a+b$　であることを証明する．

(左辺)－(右辺)$=ab+1-(a+b)=(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})$ である．

$|a|<1$　より　$a-1<0$，$|b|<1$　より　$b-1<0$

よって　$(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})>0$

したがって　$ab+1>a+b$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　式と証明(2)

例題29－1

次の等式を証明せよ．

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2)=a^2+b^2$$
$$=(\text{左辺})$$

類題29－1

次の等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2)$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$
$$=(\text{左辺})$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 29 － 2

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

(1)　$a+b+c=0$　より　$c=-a-b$

$$2a^2+bc=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2$$

$$(b-a)(c-a)=(b-a)\{(-a-b)-a\}=(b-a)(-2a-b)$$

$$=-2ab-b^2+2a^2+ab=2a^2-ab-b^2$$

よって　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$, $c=dk$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{bk-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$\frac{c-d}{d}=\frac{dk-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

類題 29 － 2

次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$a+b+c=0$ のとき　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

(1)　$a+b+c=0$　より　$c=-a-b$

このとき

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)+ab(-a-b)$$

$$=(a+b)\cdot(-a)\cdot(-b)-a^2b-ab^2$$

$$=a^2b+ab^2-a^2b-ab^2=0$$

(2)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$, $y=bk$, $z=ck$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=k^2$$

$$\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{k^2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=k^2$$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 29 ー 3

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2-x+1 \geqq x$　(2)　$x^2-6x+10>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5 \geqq 0$　(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

(1)　$(x^2-x+1)-x=x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqq 0$

よって　$x^2-x+1 \geqq x$

等号成立は　$x=1$ のとき

(2)　$x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$

(3)　$x^2-2x+y^2+4y+5=(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+5=(x-1)^2+(y+2)^2 \geqq 0$

等号成立は　$x=1$，$y=-2$ のとき

(4)　$x^2+2y^2-2xy+4y-(-5)=x^2-2xy+2y^2+4y+5$

$$=(x-y)^2-y^2+2y^2+4y+5$$

$$=(x-y)^2+y^2+4y+5$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2-4+5$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2+1>0$$

よって　$x^2+2y^2-2xy+4y>-5$

類題 29 ー 3

次の不等式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(1)　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2 \geqq 0$

(1)　$x^2+3x-(-3)=x^2+3x+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+3=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって　$x^2+3x>-3$

(2)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2=x^2-2(y-1)x+5y^2+2y+2$

$$=\{x-(y-1)\}^2-(y-1)^2+5y^2+2y+2$$

$$=(x-y+1)^2+4y^2+4y+1$$

$$=(x-y+1)^2+(2y+1)^2 \geqq 0$$

等号成立は　$x-y+1=0$ かつ $2y+1=0$　つまり　$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 29 ー 4

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x>3,\ y>4$ のとき　$xy>4x+3y-12$

(2)　$a>0,\ b>0$ のとき　$\sqrt{2a+2b}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqq|a|+|b|$

(1)　$xy-(4x+3y-12)=xy-4x-3y+12$

$$=(x-3)(y-4)-12+12=(x-3)(y-4)$$

$x>3,\ y>4$ より　$x-3>0,\ y-4>0$

よって　$(x-3)(y-4)>0$

したがって　$xy>4x+3y-12$

(2)　$(\sqrt{2a+2b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(2a+2b)-(a+2\sqrt{ab}+b)=a-2\sqrt{ab}+b$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq0$$

よって　$(\sqrt{2a+2b})^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$a>0,\ b>0$ より　$\sqrt{2a+2b}>0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$

したがって　$\sqrt{2a+2b}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(3)　$(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2-(|a|+|b|)^2=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$$=a^2-2|ab|+b^2$$

$$=(|a|-|b|)^2\geqq0$$

よって　$(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2})^2\geqq(|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqq0,\ |a|+|b|\geqq0$　より　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\geqq|a|+|b|$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 29 － 4

次の不等式を証明せよ．

(1)　$x<-3$，$y<2$ のとき　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

(1)　$xy-(2x-3y+6)=xy-2x+3y-6$

$$=(x+3)(y-2)+6-6=(x+3)(y-2)$$

$x<-3$，$y<2$ より　$x+3<0$，$y-2<0$

よって　$(x+3)(y-2)>0$

したがって　$xy>2x-3y+6$

(2)　$\{\sqrt{2(x^2+y^2)}\}^2-(|x|+|y|)^2=2(x^2+y^2)-(x^2+2|xy|+y^2)$

$$=x^2-2|xy|+y^2$$

$$=(|x|-|y|)^2\geqq 0$$

よって　$\{\sqrt{2(x^2+y^2)}\}^2\geqq(|x|+|y|)^2$

$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq 0$，$|x|+|y|\geqq 0$　より　　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|$

$(|x|+|y|)^2-(\sqrt{x^2+y^2})^2=x^2+2|xy|+y^2-(x^2+y^2)$

$$=2|xy|\geqq 0$$

よって　$(|x|+|y|)^2\geqq(\sqrt{x^2+y^2})^2$

$|x|+|y|\geqq 0$，$\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$　より　$|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

以上より　$\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqq|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第29講　式と証明(2)

(1)　$3x+y=3z$　……①，$x-3y=-z$　……②　のとき　$x^2+y^2=z^2$ であることを証明する．

①と②より x，y を z を用いて表すと　$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z$　である．

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}z\right)^2+\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}z\right)^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$　である．

(2)　不等式 $x^2-6xy+10y^2\geqq 4y-4$ が成り立つことを証明する．

(左辺)－(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-\boxed{オ}y)^2+(y-\boxed{カ})^2\geqq 0$

より　$x^2-6xy+10y^2\geqq 4y-4$　である．

また，等号が成立するのは　$x=\boxed{キ}$，$y=\boxed{ク}$　のときである．

(3)　$|a|<1$，$|b|<1$ のとき，$ab+1>a+b$　であることを証明する．

(左辺)－(右辺)$=ab+1-(a+b)=(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})$ である．

$|a|<1$　より　$a-1<0$，$|b|<1$　より　$b-1<0$

よって　$(a-\boxed{ケ})(b-\boxed{コ})>0$

したがって　$ab+1>a+b$ である．

解答例

(1)　①，②より　$x=\mathbf{\dfrac{4}{5}}z$，$y=\mathbf{\dfrac{3}{5}}z$

したがって　$x^2+y^2=\left(\dfrac{4}{5}z\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}z\right)^2=\dfrac{16}{25}z^2+\dfrac{9}{25}z^2=z^2$　より　$x^2+y^2=z^2$

(2)　(左辺)－(右辺)$=x^2-6xy+10y^2-4y+4=(x-3y)^2-9y^2+10y^2-4y+4$

$=(x-3y)^2+y^2-4y+4=(x-\mathbf{3}y)^2+(y-\mathbf{2})^2\geqq 0$

よって　$x^2-6xy+10y^2\geqq 4y-4$

等号成立は　$x-3y=0$　かつ　$y-2=0$　つまり　$x=\mathbf{6}$，$y=\mathbf{2}$　のときである．

(3)　$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)-1+1=(a-\mathbf{1})(b-\mathbf{1})$

$|a|<1$ より　$-1<a<1$　よって　$-2<a-1<0$　同様に　$-2<b-1<0$

よって　$(a-1)(b-1)>0$　したがって　$ab+1>a+b$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。